بسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان
مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

معاونت دانش‌پژوهان جوان

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۰ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی - روز اول

تاریخ : ۱۳۹۵/۲/۹ – ساعت: ۸:۳۰ مدت: ۲۷۰ دقیقه

شماره صندلی

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱- این پاسخ‌نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن خودداری نمایید.

۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ‌نامه با مشخصات شما هم‌خوانی ندارد، مراقبین را مطلع نمایید.

۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین‌شده خود بنویسید. چنان‌چه همه یا قسمتی از جواب سؤال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد.

۴- با توجه به آن‌که برگه‌های پاسخ‌نامه به نام صادر شده است، امکان ارائه هیچ‌گونه برگهٔ اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوال‌ها را در برگهٔ چرک‌نویس، حل کرده و سپس در پاسخ‌نامه پاک‌نویس نمایید.

۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان‌دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای که باشید از ادامهٔ حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۶- از مخدوش کردن دایره‌ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگهٔ شما تصحیح نخواهد شد.

۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸- شرکت‌کنندگان در دورهٔ تابستان از بین دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دبیرستان انتخاب می‌شوند.

بسم الله الرحمن الرحیم

سؤالات و راه‌حل‌های مرحلهٔ دوم سی و چهارمین دورهٔ المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

آزمون مرحلهٔ دوم سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۹ و ۱۰ اردیبهشت ۱۳۹۵ در سراسر کشور و با شرکت دانش‌آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحلهٔ اول برگزار شد. شرکت‌کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار و نیم ساعت به سه سؤال تشریحی پاسخ دادند.

دفترچهٔ پیشِ رو، شامل سؤالات آزمون به همراه راه‌حل آن‌هاست. لازم به ذکر است که این دفترچه صرفاً برای هدف آموزشی تهیه شده است و بارم‌بندی تصحیح آزمون، مستقلاً توسط گروهی از کارشناسان تهیه می‌شود.

۱. فرض کنید $c \geq b \geq a > ۰$، اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید:

$$\frac{(c-a)^۲}{۶c} \leq \frac{a+b+c}{۳} - \frac{۳}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}}.$$

(۷ نمره)

۲. مثلث ABC با دایرهٔ محیطی $w_۱$ مفروض است و داریم $\angle C = ۲\angle B$. در نقطهٔ A مماسی بر دایرهٔ $w_۱$ رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطهٔ E قطع کند. دایرهٔ $w_۲$ را طوری رسم می‌کنیم که در نقطهٔ C بر ضلع AC مماس باشد و هم‌چنین از نقطهٔ B بگذرد. این دایره ضلع AB را در نقطهٔ F قطع می‌کند. از نقطهٔ E مماس EK را بر دایرهٔ $w_۲$ رسم می‌کنیم (BC بین A و K است). اگر وسط کمان BC از دایرهٔ $w_۱$ (کمانی که شامل A نیست) را M بنامیم، ثابت کنید چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

(۷ نمره)

۳. فرض کنید شورایی شش عضو دارد و تصمیم‌ها در این شورا بر اساس رأی موافق و مخالف اعضاء گرفته می‌شود. یک «روش قابل قبول تصمیم‌گیری» باید دارای دو شرط زیر باشد:

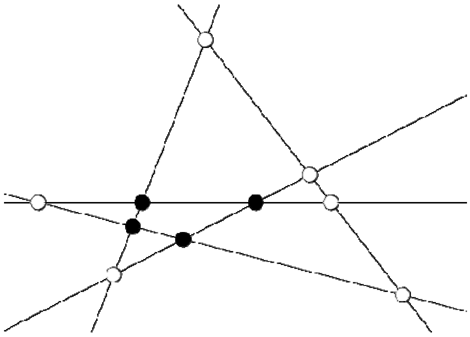
- شرط صعودی بودن: اگر در حالتی نتیجهٔ نهایی مثبت باشد و یکی از اعضای مخالف، نظرش را به موافق تغییر دهد، نتیجهٔ نهایی باید باز هم مثبت باشد.
- شرط تقارن: اگر همهٔ اعضاء نظر خود را تغییر دهند، نتیجهٔ نهایی نیز باید تغییر کند.

یک نوع روش قابل قبول تصمیم‌گیری، «رأی‌گیری وزن‌دار» است. به این ترتیب که به اعضاء وزن‌های نامنفی w_1، w_2، ... و w_6 تخصیص داده شود و تصمیم نهایی با مقایسهٔ مجموع وزن رأی‌دهندگان موافق و مخالف مشخص شود. مثلاً اگر $w_1 = 2$ و برای هر $i \geq 2$، $w_i = 1$، تصمیم‌گیری بر اساس رأی اکثریت است مگر در حالت برابری آراء که رأی نفر اول معیار تصمیم خواهد بود.

یک روش قابل قبول تصمیم‌گیری مثال بزنید که به شکل رأی‌گیری وزن‌دار، قابل توصیف نباشد. واضح است که باید درستی مثال خود را نیز ثابت کنید.

(۷ نمره)

۴. در صفحه $n \geq ۳$ خط دوبه‌دو متقاطع رسم شده است که هیچ سه‌تایی از آن‌ها هم‌رس نیستند. یک نقطهٔ تقاطع دو تا از این خط‌ها را «درونی» می‌گوییم، هرگاه در هر دو طرف این نقطه روی هر دو خط گذرا از این نقطه، نقاط تقاطع دیگری وجود داشته باشد. (برای مثال، در شکل روبه‌رو ۵ خط با ۴ نقطهٔ تقاطع درونی نشان داده شده است که با دوایر توپر مشخص شده‌اند.)



نشان دهید دست‌کم به تعداد $\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲}$ تا از نقاط تقاطع این n خط، درونی هستند.

(۷ نمره)

۵. چهارضلعی $ABCD$ و نقطهٔ T داخل آن طوری انتخاب شده‌اند که AC نیم‌ساز زاویهٔ $\angle BCD$ است، $\angle ABC - \angle ATD = \angle DAC$ و هم‌چنین $\angle ADC - \angle ATB = \angle BAC$.

ثابت کنید: $\angle BAT = \angle DAC$.

(۷ نمره)

۶. همهٔ توابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را بیابید که در دو شرط زیر صدق می‌کنند:

- به ازای هر دو عدد طبیعی x و y، مقدار $f(x)+f(y)$ بر $x+y$ بخش‌پذیر است.
- برای هر عدد طبیعی $x \geq ۱۳۹۵$، نابرابری $۲f(x) \leq x^۳$ برقرار است.

(۷ نمره)

۱. فرض کنید $۰ < a \le b \le c$، اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید:

$$\frac{(c-a)^۲}{۶c} \le \frac{a+b+c}{۳} - \frac{۳}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}}.$$

راه‌حل اول. صرفاً برای خلاصه شدن عبارات، تعریف می‌کنیم $S = a+c$ و $P = ac$. در این‌صورت برای سمت راست نابرابری مسأله داریم:

$$R = \frac{a+b+c}{۳} - \frac{۳}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}} = \frac{S+b}{۳} - \frac{۳Pb}{Sb+P}.$$

هدف این است که عبارت اخیر را به عنوان تابعی بر حسب متغیر b مینیمم کنیم؛ توجه کنید که عبارت مورد بحث بر حسب متغیر b شامل یک جزء خطی، یعنی $\frac{S+b}{۳}$ و یک جزء کسری است که مخرج آن $Sb+P$ است. اکنون با تغییر متغیر $t = Sb+P$ عبارت را بازنویسی می‌کنیم و با کمی محاسبهٔ ساده به عبارت زیر می‌رسیم:

$$R = \frac{S+b}{۳} - \frac{۳Pb}{Sb+P} = \frac{S^۲ - ۱۰P}{۳S} + \frac{t}{۳S} + \frac{۳P^۲}{St}.$$

اکنون توجه کنید که حاصل‌ضرب دو جملهٔ آخر، عبارتی بدون متغیر t است. پس طبق نابرابری $u+v \ge ۲\sqrt{uv}$ داریم:

$$R \ge \frac{S^۲ - ۱۰P}{۳S} + ۲\sqrt{\frac{P^۲}{S^۲}} = \frac{S^۲ - ۴P}{۳S} = \frac{(c-a)^۲}{۳(c+a)} \ge \frac{(c-a)^۲}{۶c}.$$

راه حل دوم. برای راحتی در نوشتن، به ازای هر فرمول دلخواه $F(a,b,c)$ بر حسب سه متغیر a، b و c، جمع دوریِ

$$F(a,b,c) + F(b,c,a) + F(c,a,b)$$

را با $\sum F(a,b,c)$ نمایش می‌دهیم. با این نمادگذاری سمت راست نابرابری مسأله را بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\frac{\sum a}{۳} - \frac{۳}{\sum \frac{۱}{a}} &= \frac{\sum a}{۳} - \frac{۳abc}{\sum ab} = \frac{(\sum a)(\sum ab) - ۹abc}{۳\sum ab} \\ &= \frac{\sum (a^۲b + ab^۲) - ۶abc}{۳\sum ab} = \frac{\sum a(b-c)^۲}{۳\sum ab}.\end{aligned}$$

بنابراین نابرابری مسأله معادل با نابرابری زیر است:

$$\sum a(b-c)^۲ \ \ge \ \left(\frac{\sum ab}{۲c}\right)(c-a)^۲. \qquad (۱)$$

اما توجه کنید که با توجه به ترتیب $a \le b \le c$، $\frac{ab}{۲c}$ از $\frac{b}{۲}$ بیشتر نیست و در نتیجه برای سمت راست نابرابری بالا داریم:

$$\left(\frac{\sum ab}{۲c}\right)(c-a)^۲ = \left(\frac{ab}{۲c} + \frac{a+b}{۲}\right)(c-a)^۲ \le (\frac{a}{۲}+b)(c-a)^۲. \qquad (۲)$$

برای سمت چپ نابرابری (۱) هم به دست می‌آید:

$$\sum a(b-c)^۲ \geq b(c-a)^۲ + a\left((c-b)^۲ + (b-a)^۲\right). \qquad (۳)$$

حال توجه کنید که برای هر دو عدد X و Y،

$$(X-Y)^۲ \geq ۰ \implies X^۲ + Y^۲ - ۲XY \geq ۰ \implies ۲(X^۲+Y^۲) \geq (X+Y)^۲$$
$$\implies X^۲ + Y^۲ \geq \frac{(X+Y)^۲}{۲}.$$

در نتیجه اگر قرار دهیم، $X = c-b, Y = b-a$، با استفاده از نابرابری (۳) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\sum a(b-c)^۲ \geq b(c-a)^۲ + a\left((c-b)^۲ + (b-a)^۲\right) \geq b(c-a)^۲ + \frac{a}{۲}(c-a)^۲.$$

و این نابرابری به همراه نابرابری (۲)، نابرابری (۱) که معادل حکم مسأله است را نتیجه می‌دهد.

توجه. راه‌حل‌های دیگری برای این سؤال را می‌توانید در صفحهٔ زیر مشاهده کنید:

http://artofproblemsolving.com/community/c6h1234734_iran_inequality

۲. مثلث ABC با دایرهٔ محیطی w_1 مفروض است و داریم $\angle C = 2\angle B$. در نقطهٔ A مماسی بر دایرهٔ w_1 رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطهٔ E قطع کند. دایرهٔ w_2 را طوری رسم می‌کنیم که در نقطهٔ C بر ضلع AC مماس باشد و همچنین از نقطهٔ B بگذرد. این دایره ضلع AB را در نقطهٔ F قطع می‌کند. از نقطهٔ E مماس EK را بر دایرهٔ w_2 رسم می‌کنیم (BC بین A و K است). اگر وسط کمان BC از دایرهٔ w_1 (کمانی که شامل A نیست) را M بنامیم، ثابت کنید چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

راه حل اول. اگر محل تقاطع FK و BC را D بنامیم، آنگاه در دایرهٔ w_2 داریم:

$$\left.\begin{array}{lll} \widehat{ACB} & = & \frac{\widehat{BC}}{2} \\ \widehat{FBC} & = & \frac{\widehat{FC}}{2} \\ \widehat{C} & = & 2\widehat{B} \end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{BF} = \widehat{FC},$$

$$\left.\begin{array}{lll} \widehat{CDK} & = & \frac{\widehat{BF}+\widehat{CK}}{2} \\ \widehat{DKE} & = & \frac{\widehat{FC}+\widehat{CK}}{2} \\ \widehat{BF} & = & \widehat{FC} \end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{EDK} = \widehat{DKE} \Longrightarrow ED = EK. \qquad (۴)$$

از طرفی طبق قوت نقطهٔ E نسبت به دو دایرهٔ w_1 و w_2 می‌دانیم:

$$\left.\begin{array}{lll} EK^2 & = & EC \cdot EB \\ EA^2 & = & EC \cdot EB \end{array}\right\} \Longrightarrow EK = EA. \qquad (۵)$$

و ترکیب (۴) و (۵) نتیجه می‌دهد که:

$$ED = EA \Longrightarrow \widehat{ADE} = \widehat{DAE}.$$

حال اگر AD را امتداد دهیم تا دایرهٔ w_1 را در N قطع کند، در دایرهٔ w_1 داریم:

$$\left.\begin{array}{lll} \widehat{DAE} & = & \frac{\widehat{AC}+\widehat{CN}}{2} \\ \widehat{ADE} & = & \frac{\widehat{AC}+\widehat{BN}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{CN} = \widehat{BN}.$$

و N وسط کمان BC (یعنی همان M) است.

حال طبق قوت D در دو دایره داریم:

$$FD \cdot DK = BD \cdot DC = MD \cdot DA,$$

پس $FD \cdot DK = MD \cdot DA$، در نتیجه چهارضلعی $MFAK$ محاطی است.

راه‌حل دوم. اگر قوت نقطهٔ E را نسبت به دو دایرهٔ w_1 و w_2 بنویسیم، داریم:

$$\left.\begin{array}{rcl} EC\cdot EB &=& EA^2 \\ EC\cdot EB &=& EK^2 \end{array}\right\} \implies EA=EK.$$

حال ثابت می‌کنیم که نیمساز زاویهٔ $\widehat{BAC}$ و نیمساز زاویهٔ $\widehat{BKC}$ روی ضلع BC هم‌دیگر را قطع می‌کنند. برای این منظور کافی است اثبات کنیم که $\frac{KB}{KC}=\frac{AB}{AC}$.

دو مثلث ECK و EKB با هم متشابه‌اند، پس $\frac{KB}{KC}=\frac{EB}{EK}$. همچنین دو مثلث EAC و EBA نیز متشابه‌اند و داریم: $\frac{AB}{AC}=\frac{EB}{EA}$.

و چون می‌دانیم $EK=EA$ پس $\frac{KB}{KC}=\frac{AB}{AC}$. حال اگر محل برخورد این نیمسازها با ضلع BC را D بنامیم، F و M وسط کمان BC از دو دایره هستند، پس K و D و F هم‌خطند و A و D و M نیز هم‌خطند.

قوت D را در دو دایره می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{rcl} BD\cdot DC &=& AD\cdot DM \\ BD\cdot DC &=& FD\cdot DK \end{array}\right\} \implies AD\cdot DM=FD\cdot DK,$$

پس چهارضلعی $AFMK$ محاطی است.

۳. فرض کنید شورایی شش نفر عضو دارد و تصمیمات در این شورا بر اساس رأی موافق و مخالف اعضاء گرفته می‌شود. یک «روش قابل قبول تصمیم‌گیری» باید دارای دو شرط زیر باشد:

- شرط صعودی بودن: اگر در حالتی نتیجهٔ نهایی مثبت باشد و یکی از اعضای مخالف، نظرش را به موافق تغییر دهد، نتیجهٔ نهایی باید باز هم مثبت باشد.
- شرط تقارن: اگر همهٔ اعضاء نظر خود را تغییر دهند، نتیجهٔ نهایی نیز باید تغییر کند.

یک نوع روش قابل قبول تصمیم‌گیری، «رأی‌گیری وزن‌دار» است. به این ترتیب که به اعضاء وزن‌های نامنفی $w_۱$، $w_۲$، … و $w_۶$ تخصیص داده شود و تصمیم نهایی با مقایسهٔ مجموع وزن رأی‌دهندگان موافق و مخالف مشخص شود. مثلاً اگر $w_۱ = ۲$ و برای هر $i \geq ۲$، $w_i = ۱$، تصمیم‌گیری بر اساس رأی اکثریت است مگر در حالت برابری آراء که رأی نفر اول معیار تصمیم خواهد بود.
یک روش قابل قبول تصمیم‌گیری مثال بزنید که به شکل رأی‌گیری وزن‌دار، قابل توصیف نباشد. واضح است که باید درستی مثال خود را نیز ثابت کنید.

راه حل. اعضای شورا را با شماره‌های ۱ تا ۶، شماره‌گذاری می‌کنیم. روش زیر برای تصمیم‌گیری را در نظر بگیرید:

> اگر نفرات اول تا سوم هم‌رأی بودند، رأی آنها را به عنوان نتیجهٔ نهایی در نظر می‌گیریم و در غیر این‌صورت نتیجهٔ نهایی بر اساس اکثریت آراء نفرات چهارم تا ششم تعیین می‌شود.

این روش تصمیم‌گیری به وضوح دارای دو شرط صعودی بودن و تقارن است و بنابراین یک روش قابل قبول است. ادعا می‌کنیم که به هیچ صورتی نمی‌توان به اعضا وزن داد، به طوری که این روش از مقایسهٔ وزن اعضای موافق و مخالف حاصل شود.
با برهان خلف فرض می‌کنیم چنین نباشد و وزن‌دهی $(w_۱, \dots, w_۶)$ یک وزن‌دهی برای این روش باشد.(یعنی وزن نفر اول، $w_۱$، وزن نفر دوم، $w_۲$ و به همین ترتیب وزن نفر i-ام، w_i است) با توجه به یکسان بودن نقش سه عضو اول با یکدیگر و همچنین سه عضو آخر با هم در این روش،

$$(w_۲, w_۳, w_۱, w_۵, w_۶, w_۴)$$

و همین‌طور

$$(w_۳, w_۱, w_۲, w_۶, w_۴, w_۵)$$

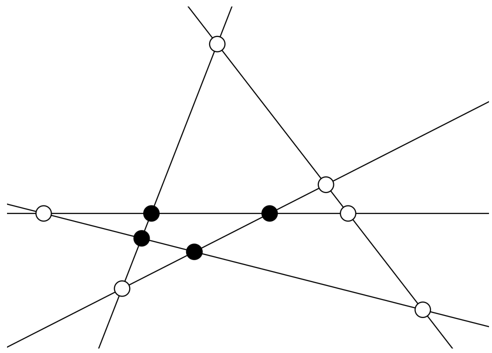
وزن‌دهی‌های دیگری برای این روش هستند. به سادگی می‌توان دید که اگر چند وزن‌دهی به یک روش تصمیم‌گیری منجر شوند، جمع آنها هم همان روش تصمیم‌گیری را به ما می‌دهد. پس جمع سه وزن‌دهی ذکر شده یک وزن‌دهی برای روش تصمیم‌گیری پیشنهادی ماست، یعنی اگر قرار دهیم $a = w_۱ + w_۲ + w_۳$ و $b = w_۴ + w_۵ + w_۶$، (a, a, a, b, b, b) یک وزن‌دهی برای این روش است.
حال ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که سه نفر اول موافق و سه نفر دوم مخالف باشند. در این‌صورت در روش ما نتیجهٔ نهایی موافق است و بنابر وزن‌دهی ادعاشده، $۳a > ۳b$. حالت دیگری را هم می‌توان در نظر گرفت که دو نفر از سه نفر اول و یک نفر از سه نفر آخر موافق و بقیه مخالف باشند. در این حالت، تصمیم نهایی مخالف است و جمع وزن موافقان $۲a + b$ و وزن مخالفان $۲b + a$ است. باز اگر وزن‌دهی ادعاشده همین نتیجه را بدهد، باید داشته باشیم $۲b + a > ۲a + b$ و در نتیجه $b > a$. این نابرابری با نابرابری قبلی متناقض است و در نتیجه فرض خلف ما به تناقض منجر می‌شود. پس روش تصمیم‌گیری ارائه شده وزن‌دار نیست.

تذکر. روش‌های تصمیم‌گیری قابل قبول دیگری نیز می‌توان ارائه کرد که وزن‌دار نباشند. ما در اینجا به دو نمونهٔ دیگر اشاره می‌کنیم:

- اگر یک تصمیم (موافق یا مخالف)، بیشتر از سه رأی داشته باشد، به عنوان تصمیم نهایی انتخاب می‌شود و در صورت تساوی آراء موافق و مخالف، تصمیمی که تعداد موافقان آن در میان نفرات اول تا سوم، عددی فرد باشد، اتخاذ می‌شود.

- فرض کنید پنج نفر اول دور یک میز نشسته‌اند. در این‌صورت اگر سه نفر مجاور از آنها هم‌نظر بودند، نظر مشترک آنها و در غیر این‌صورت نظر نفر ششم اتخاذ می‌شود.

۴. در صفحه $n \geq ۳$ خط دوبه‌دو متقاطع رسم شده است که هیچ سه‌تایی از آن‌ها همرس نیستند. یک نقطهٔ تقاطع دو تا از این خط‌ها را «درونی» می‌گوییم، هرگاه در هر دو طرف این نقطه روی هر دو خط گذرا از این نقطه، نقاط تقاطع دیگری وجود داشته باشد. (برای مثال، در شکل روبه‌رو ۵ خط با ۴ نقطهٔ تقاطع درونی نشان داده شده است که با دایره‌های توپر مشخص شده‌اند.)



نشان دهید دست‌کم به تعداد $\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲}$ تا از نقاط تقاطع این n خط، درونی هستند.

راه حل. گرافی در نظر بگیرید که رئوس آن نقاط تقاطع خطوط مسأله و یال‌های آن پاره‌خط‌هایی است که این خطوط روی یکدیگر جدا می‌کنند. (یعنی پاره‌خط‌هایی روی این خطوط که دو سر آن دو تقاطع است و درون آن تقاطعی وجود ندارد) این گراف را G می‌نامیم. هر دو تا از این n خط دقیقاً یک تقاطع دارند و در نتیجه تعداد رئوس گراف G برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است. از طرف دیگر روی هر خط $n-۱$ تقاطع وجود دارد و در نتیجه پاره‌خط‌های مابین آن‌ها $n-۲$ یال از گراف G به ما می‌دهد. پس تعداد یال‌های گراف هم برابر $n(n-۲)$ است.

با توجه به اینکه تعداد خطوط حداقل سه تا است، درجات رئوس G، ۲، ۳ یا ۴ است که تعداد رئوس با هر یک از این درجات را به ترتیب با a، b و c نشان می‌دهیم. رئوس با بیشترین درجه همان نقاط تقاطع درونی هستند. حال توجه کنید که با داشتن تعداد کل رئوس گراف G و اینکه جمع درجات رئوس در هر گراف دو برابر تعداد یال‌های آن است، دو رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$a+b+c=\frac{n(n-۱)}{۲},$$

$$۲a+۳b+۴c=۲n(n-۲).$$

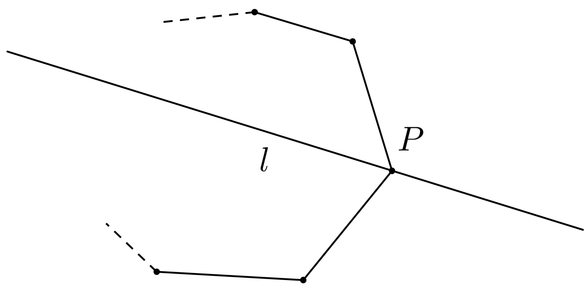
اگر ۳ برابر تساوی اول را از تساوی دوم کم کنیم، به تساوی زیر می‌رسیم:

$$c-a=\frac{n^۲-۵n}{۲} \implies c=(a-۳)+\frac{(n-۲)(n-۳)}{۲}.$$

پس حکم معادل با این است که در گراف G حداقل ۳ رأس با درجهٔ ۲ داریم. برای اثبات این گزاره هم از لم زیر استفاده می‌کنیم که شهوداً واضح است و اثباتش در پایان می‌آید:

لم. برای هر تعداد نقطهٔ دلخواه در صفحه که هم‌خط نباشند، یک چندضلعی محدب وجود دارد که همهٔ این نقاط درون و یا روی اضلاع آن قرار می‌گیرند و رئوس آن از میان این نقاط باشند.

حال اگر لم را برای نقاط تقاطع خطوط مسأله استفاده کنیم، نتیجه می‌شود که یک $k \geq 3$ -ضلعی محدب وجود دارد که رئوس آن از میان تقاطع‌هاست و بقیهٔ تقاطع‌ها درون و یا روی اضلاع آن قرار دارند. به راحتی می‌توان دید که درجهٔ همهٔ رئوس این چندضلعی در گراف G برابر ۲ است. زیرا اگر l یکی از دو خط گذرا از رأس P در این چندضلعی باشد، همهٔ تقاطع‌های روی آن در درون چندضلعی و در نتیجه در یک طرف P قرار دارند. پس P فقط یک رأس مجاور روی این خط دارد و با در نظر گرفتن خط دیگر گذرا از P، نتیجه می‌شود که درجهٔ P در گراف برابر ۲ است.



پس $a \geq k \geq 3$ و اثبات کامل می‌شود.

اثبات لم. یک خط در نظر بگیرید که همهٔ نقاط در یک طرف آن باشند و با هیچ یک از خطوط واصل دو تا از نقاط داده شده موازی نباشد. حال این خط را به موازات خود به سمتی که نقاط قرار دارند حرکت دهید تا به اولین نقطه برسد. با توجه به فرضی که در مورد راستای خط کردیم، در این لحظه فقط یک نقطه روی خط قرار دارد که آن را P_1 می‌نامیم. حال خطمان را در جهت ساعت‌گرد حول P_1 می‌چرخانیم تا به اولین نقطهٔ دیگر برخورد کند. دورترین نقطهٔ روی خط از P_1 در این وضعیت را P_2 می‌نامیم. حال خط را حول P_2 در جهت ساعت‌گرد بچرخانید تا به اولین نقطهٔ جدید برخورد کنید و به همین ترتیب دنبالهٔ نقاط $P_3, P_4, \ldots$ را بسازید. با توجه به متناهی بودن کل نقاط، جایی در این دنباله با دور مواجه می‌شویم و نقاط این دور و پاره‌خط‌های بین نقاط متوالی، چندضلعی محدب خواسته شده را به ما می‌دهد. (خیلی راحت می‌توان نشان داد که این دور کامل است، گرچه به این مطلب برای اثبات لم احتیاج نداریم. ضمناً چندضلعی محدب با شرایط لم یکتاست و به آن «پوش‌محدب» مجموعهٔ مورد نظر از نقاط می‌گویند.)

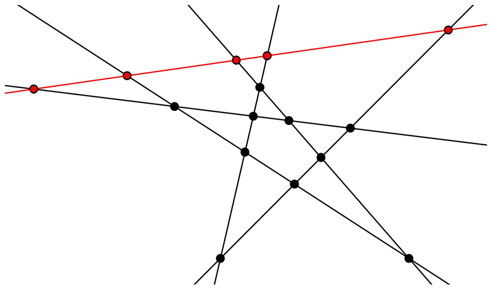
تذکر. با توجه به رابطهٔ

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{(n-3)(n-4)}{2} + n - 3,$$

تلاش برای اثبات گزارهٔ زیر، یک ایده برای اثبات حکم مسأله با استفاده از استقراء است:

> اضافه کردن یک خط جدید به یک مجموعه از $n-۱$ خط در صفحه، (که همگی دوبه‌دو متقاطع باشند و هیچ سه‌تایی همرس نباشند) حداقل $n-۳$ نقطه به نقاط تقاطع درونی اضافه می‌کند.

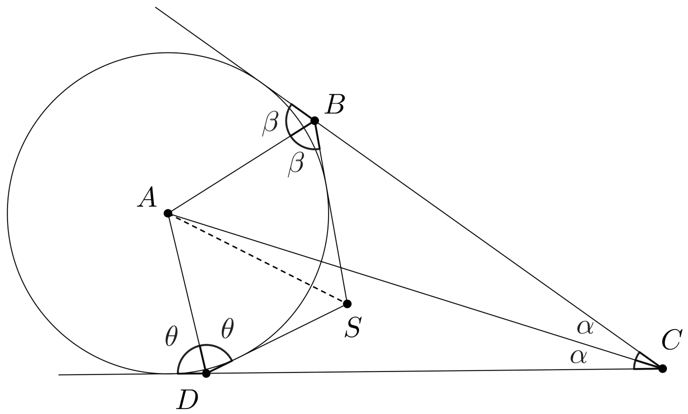
اما متأسفانه (!) این گزاره غلط است و شکل زیر یک مثال نقض برای آن در حالت $n=۶$ ارائه می‌کند: (خط قرمز، خط جدید است)



تعداد تقاطع‌های درونی قبل از اضافه کردن خط جدید، ۵ تا و بعد از اضافه کردن ۷ تا است و در نتیجه کمتر از $n-۳=۳$ تا زیاد می‌شود.

۵. چهارضلعی $ABCD$ و نقطهٔ T داخل آن طوری انتخاب شده‌اند که AC نیمساز زاویهٔ $\angle BCD$ است، $\angle ABC - \angle ATD = \angle DAC$ و همچنین $\angle ADC - \angle ATB = \angle BAC$.
ثابت کنید: $\angle BAT = \angle DAC$.

راه حل اول. رأس A روی نیمساز زاویهٔ $\widehat{C}$ قرار دارد و از دو خط CB و CD به یک فاصله است.
بنابراین می‌توان دایره‌ای به مرکز A رسم کرد که بر دو خط CB و CD مماس باشد.
خطوط مماس بر دایره که از B و D رسم می‌شوند در S متقاطع‌اند.



$$\widehat{BSD} = \widehat{BCD} + \widehat{CBS} + \widehat{CDS} = ۲\alpha + ۱۸۰^\circ - ۲\beta + ۱۸۰^\circ - ۲\theta = ۲(۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta)$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{BSA} = \widehat{DSA} = ۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \widehat{ABC} - \widehat{ASD} & = (۱۸۰^\circ - \beta) - (۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta) \quad = \theta - \alpha \quad = \widehat{DAC} \\ \widehat{ADC} - \widehat{ASB} & = (۱۸۰^\circ - \theta) - (۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta) \quad = \beta - \alpha \quad = \widehat{BAC} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \widehat{ASD} & = \widehat{ATD} \\ \widehat{ASB} & = \widehat{ATB} \end{cases} \tag{۶}$$

با توجه به تعریف نقطهٔ T و یکتا بودن آن نتیجه می‌گیریم، نقطهٔ S بر T منطبق است و در نتیجه:

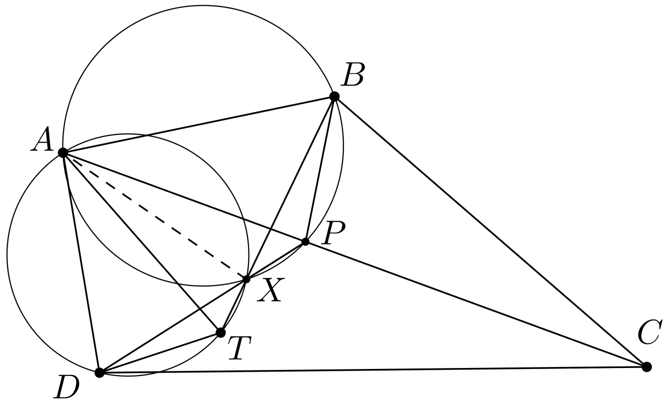
$$\widehat{BAS} = ۱۸۰^\circ - \widehat{ABS} - \widehat{ASB} = ۱۸۰^\circ - \beta - (۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta) = \theta - \alpha = \widehat{DAC}.$$

اگر نقاط S و T بر هم منطبق نباشند، با توجه به رابطهٔ (۶) چهارضلعی‌های $ABST$ و $ADST$ محاطی‌اند، پس $BADS$ محاطی است و داریم:

$$\beta + \theta = ۱۸۰^\circ \Longrightarrow \quad \widehat{BSA} = \widehat{DSA} = ۱۸۰^\circ + \alpha - \beta - \theta = \alpha$$
$$\Longrightarrow \quad \widehat{BSD} = \widehat{BSA} + \widehat{DSA} = ۲\alpha$$
$$\Longrightarrow \quad \widehat{BTD} = \widehat{BSD} = ۲\alpha = \widehat{BCD},$$

اما طبق فرض مسأله نقطهٔ T داخل چهارضلعی $ABCD$ قرار دارد و $\widehat{BTD} > \widehat{BCD}$. بنابراین S و T منطبق‌اند.

راه‌حل دوم.



$$\begin{aligned} \widehat{BCA} = \widehat{DCA} \quad &\Longrightarrow \quad \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = \widehat{ADC} + \widehat{DAC} \\ &\Longrightarrow \quad \widehat{ABC} - \widehat{DAC} = \widehat{ADC} - \widehat{BAC} \\ &\Longrightarrow \quad \widehat{ATD} = \widehat{ATB} = \alpha. \end{aligned}$$

نقطهٔ P را بر قطر AC در نظر می‌گیریم به طوری که $\widehat{PBC} = \widehat{DAC}$. داریم:

$$\widehat{ABP} = \widehat{ABC} - \widehat{PBC} = \widehat{ABC} - \widehat{DAC} = \alpha,$$

$$\triangle\, BPC \sim \triangle ADC \Longrightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{PC}{DC} \Longrightarrow \left.\begin{array}{ccc} \frac{BC}{PC} & = & \frac{AC}{DC} \\ \widehat{BCA} & = & \widehat{DCA} \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle DPC \sim \triangle ABC,$$

$$\Longrightarrow \widehat{PDC} = \widehat{BAC}$$

$$\Longrightarrow \widehat{ADP} = \widehat{ADC} - \widehat{PDC} = \widehat{ADC} - \widehat{BAC} = \alpha.$$

نقطهٔ تقاطع DP و BT را X می‌نامیم.

$\widehat{ADX} = \widehat{ATX} = \alpha \quad \Longrightarrow$ $ADTX$ محاطی است.

$\widehat{AXD} = \widehat{ATD} = \widehat{ABP} = \alpha \Longrightarrow$ $ABPX$ محاطی است.

در نتیجه

$$\widehat{BAP} = \widehat{BXP} = \widehat{DXT} = \widehat{DAT} \Longrightarrow \widehat{BAT} = \widehat{DAC}.$$

۶. همهٔ توابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را بیابید که در دو شرط زیر صدق می‌کنند:

- به ازای هر دو عدد طبیعی x و y، مقدار $f(x) + f(y)$ بر $x + y$ بخش‌پذیر است.
- برای هر عدد طبیعی $x \geq ۱۳۹۵$، نابرابری $۲f(x) \leq x^۳$ برقرار است.

راه حل. ابتدا توجه کنید که با قرار دادن $x = y$ در شرط اول، نتیجه می‌شود که $f(x)$ بر x بخش‌پذیر است و در نتیجه می‌توانیم بنویسیم، $f(x) = xg(x)$ که $g(x)$ عددی طبیعی است. حال فرض کنیم $g(۱) = a$ و $g(۲) = b$. نشان می‌دهیم اگر x یک عدد فرد به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، $g(x)$ برابر a است. برای این کار دو بار از شرط اول برای $y = ۱$ و $y = ۲$ استفاده می‌کنیم:

$$x + ۱ \mid xg(x) + a = (x + ۱)g(x) + (a - g(x)) \implies x + ۱ \mid g(x) - a,$$

$$x + ۲ \mid xg(x) + ۲b = (x + ۲)g(x) + ۲(b - g(x)) \implies x + ۲ \mid g(x) - b.$$

(نتیجه‌گیری آخر به این علت است که $x + ۲$ فرد است) در نتیجه با توجه به نسبت به هم اول بودن $x + ۱$ و $x + ۲$، باقیماندهٔ $g(x)$ بر $(x + ۱)(x + ۲)$ با دانستن باقیمانده‌اش بر $x + ۱$ و $x + ۲$ به صورت یکتا به دست می‌آید. $a(x + ۲) - b(x + ۱)$ در دو بخش‌پذیری بالا به جای $g(x)$ صدق می‌کند، پس داریم:

$$g(x) = a(x + ۲) - b(x + ۱) + c(x + ۱)(x + ۲) = cx^۲ + (۳c + a - b)x + (۲c + ۲a - b).$$

که c عددی صحیح است. با توجه به فرض مسأله برای xهای به اندازهٔ کافی بزرگ $۰ < g(x) \leq \frac{x^۲}{۲}$، پس c نامنفی و حداکثر $\frac{۱}{۲}$ است و چون صحیح است، $c = ۰$. پس داریم:

$$g(x) = (a - b)x + (۲a - b).$$

لم. اگر X و Y نسبت به هم اول باشند، $X + Y | g(X) - g(Y)$.

اثبات لم. بنابر فرض مسأله $Xg(X) + Yg(Y)$ بر $X + Y$ بخش‌پذیر است. پس اگر $(X + Y)g(Y)$ را هم از آن کم کنیم، باز چنین است. پس $X(g(X) - g(Y))$ بر $X + Y$ بخش‌پذیر است. اما X و $X + Y$ نسبت به هم اولند، پس $g(X) - g(Y)$ بر $X + Y$ بخش‌پذیر است.

حال در ادامهٔ حل مسأله فرض کنیم x' عدد فرد به اندازهٔ کافی بزرگ دیگری باشد که نسبت به x اول است، در این‌صورت با توجه به لم:

$$x + x'|(a - b)(x - x'),$$

اما بزرگترین مقسوم علیه مشترک $x + x'$ و $x - x'$ برابر ۲ است، پس $\frac{x+x'}{2}|(a-b)$. حال اگر x' را از دو برابر قدرمطلق $a - b$ بزرگتر بگیریم، نتیجه می‌شود $a - b = 0$ و در نتیجه برای xهای فرد بزرگ $g(x) = 2a - b = a$ و ادعای ما ثابت می‌شود.

حال فرض کنید y یک عدد طبیعی دلخواه باشد. اگر x را یک عدد طبیعی به اندازهٔ کافی بزرگ بگیریم که نسبت به $2y$ اول باشد، بنابرلم:

$$x + y|g(x) - g(y) = a - g(y).$$

پس $a - g(y)$ بر تمامی $x + y$هایی که x خاصیت گفته‌شده را داشته باشد، بخش‌پذیر است. اما اگر $a - g(y)$ صفر نباشد، x نمی‌تواند از حدی بزرگتر باشد. پس نتیجه می‌گیریم که برای هر y، $g(y) = a$ و $f(y) = ay$.

در نهایت با توجه به شرط دوم، $2a \leq 1395^2$، تمامی توابعی که در دو شرط مسأله صدق می‌کنند به صورت $f(x) = ax$ هستند که a عددی طبیعی کوچکتر از $\frac{1395^2}{2}$ است.